Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible

Théorème 1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série sur le disque unité $D(0,1)$. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ est convergente de somme S. Notons, pour tout $\theta_0 \in [0, \pi/2[$,*

$$\Delta_{\theta_0} := \left\{ z \in D(0,1) : \exists p > 0, \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[, z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}.$$

Alors,

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. *Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, puis $R_n = S - S_n$.*

Fixons $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k z^k - S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k (z^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (R_{k-1} - R_k)(z^k - 1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} R_{k-1}(z^k - 1) - \sum_{k=1}^{n} R_k (z^k - 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} R_k (z^{k+1} - 1) - \sum_{k=1}^{n} R_k (z^k - 1) \\
&= R_0 (z-1) + \sum_{k=1}^{n-1} R_k (z^{k+1} - z^k) - R_n (z^n - 1) \\
&= -R_n (z^n - 1) + (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} R_k z^k.
\end{aligned}$$

Comme (S_n), converge et $|z| < 1$, $R_n(z^n - 1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient,

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{k=0}^{+\infty} R_k z^k.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, on dispose d'un rang $N > 0$ à partir duquel $|R_k| < \varepsilon$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq |z-1| \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| + \varepsilon |z-1| \sum_{k=N}^{+\infty} |z|^k \\
&\leq \rho \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| |z|^k + \varepsilon \frac{\rho}{1 - |z|} \\
&\leq \rho \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| |z|^k + \varepsilon \rho \frac{1 + |z|}{1 - |z|^2} \\
&\leq \rho \sum_{k=0}^{N-1} |R_k| + \frac{2\varepsilon\rho}{1 - |z|^2}.
\end{aligned}$$

Or, $1 - |z|^2 = 1 - (1 - \rho\cos(\theta))^2 - \rho^2 \sin(\theta)^2 = 2\rho\cos(\theta) - \rho^2$.

Comme $\rho \underset{z \to 1}{\longrightarrow} 0$, on peut imposer $\rho \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{k=0}^{N-1} |R_k|}, \cos(\theta_0) \right)$.

Alors,

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{2\cos\theta - \rho} \\
&\leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration du théorème.

Théorème 2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On note f la somme de cette série sur $]-1,1[$ et on suppose que $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ existe et vaut S.*

Si en plus $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge de somme S.

Démonstration. *On conserve les notations utilisées lors de la démonstration précédente. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$. Alors,*

$$\begin{aligned}
|S_n - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k (x^k - 1) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \\
&\leq (x-1) \sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k|a_k|}{n} x^k.
\end{aligned}$$

On a utilisé que $|x^k - 1| \leq k|x-1|$ et $k/n < 1$ pour $k \geq n+1$. D'après l'hypothèse faite sur les (a_k), la suite (ka_k) converge vers 0. Notons M un majorant de la suite (ka_k). Fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons n assez grand pour que, $\sup_{k>n} k|a_k| < \varepsilon^2$. Alors,

$$|S_n - f(x)| \leq (x-1)Mn + \frac{\varepsilon^2}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \leq (1-x)Mn + \frac{\varepsilon^2}{n(1-x)}.$$

Par définition de S, on peut déjà supposer n assez grand pour que l'on ait,

$$\left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|S_n - S| &\leq \left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| + \left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \\
&\leq (M\varepsilon + \varepsilon) + \varepsilon = (M+2)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la démonstration du théorème.

Remarques, références.

La seule référence est le Gourdon d'analyse. Le développement se fait très bien mais il ne faut pas l'improviser. Une fois qu'on l'a écrit deux ou trois fois on se souvient des petites astuces. Il faut essayer de ne pas perdre trop de temps dans les calculs. L'idéal c'est de savoir donner des applications (cf Gourdon), et un contre-exemple dans le cas où $\theta_0 = \pi/2$. Personnellement je n'en avais pas préparé, mais je crois que ça existe.. Aussi, savoir qu'on peut alléger les hypothèses est important (cf théorème taubérien fort). Je ne pense pas qu'il faille avoir une quelconque idée de la preuve, on ne vous la demandera jamais..